#Last_course #fun_ends #bye_Beli

NO: 26-05-16
Date:

• Πρώτα και Μέγιστα Ιδεώδη

Ορισμός: Ένα ιδεώδες M του δακτυλίου R καλείται μέγιστο $\Leftrightarrow$

$M \neq R$ και αν: I: ιδεώδες του R έτσι ώστε $M \subseteq I \subseteq R$

τότε είτε: $M = I$, είτε: $I = R$

• Θεώρημα: Αν M είναι ένα (γνήσιο) ιδεώδες του R, όπου ο R: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

① Το M είναι μέγιστο

② Αν $a \in R$, όπου $a \notin M$, τότε $(a) + M = \left\{ ra + x \in R \,\middle|\, \begin{array}{l} r \in R \\ x \in M \end{array} \right\} = R$

③ Ο δακτύλιος πηλίκο R/M είναι σώμα

Απόδειξη: ① $\Rightarrow$ ② Έστω ότι το M: μέγιστο

και $a \in R - M$. Τότε το σύνολο $(a) + M = \left\{ ra + x \in R \,\middle|\, \begin{array}{l} r \in R \\ x \in M \end{array} \right\}$ είναι ένα ιδεώδες του R

(Αν I, J: ιδεώδη του R, τότε $(I+J) \underset{\text{ϕ}}{=} \{x+y \in R \mid x \in I, y \in J\}$ ιδεώδες του R

Επειδή το $0 \in I, J$ και $0 = 0 + 0 \Rightarrow 0 \in I + J$

Αν $z, \omega \in I + J$, τότε: $\left. \begin{array}{l} z = x_1 + y_1 \\ \omega = x_2 + y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow z - \omega = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$

$x_1, x_2 \in I$, $y_1, y_2 \in J$

NO:
Date:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1-x_2)\in I\\(y_1-y_2)\in J\end{array}\right\} \Rightarrow z-w \in I+J$$

Επίσης, αν $r\in R$, τότε: $r\cdot z = \underbrace{rx_1}_{\in I}+\underbrace{ry_1}_{\in J} \in I+J$

$z\cdot r = x_1 r + y_1 r \in I+J$

Συνεπώς, $I+J$: ιδεώδες του R)

Άρα, το $(a)+M$: ιδεώδες του R και προφανώς

$M\subseteq (a)+M \subseteq R$. Τότε, επειδή το M: μέγιστο, έπεται ότι: $M=(a)+M$ είτε $(a)+M=R$.

Αν $M=(a)+M$, τότε $a\in (a)\subseteq (a)+M = M$.

Άτοπο από υπόθεση, άρα: $(a)+M=R$

②$\Rightarrow$③: Έστω $(a)+M=R$, $\forall a\in R-M$

Από την υπόθεση έχουμε: Ο δακτύλιος πηλίκο R/M είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα (1_R+M)

Έστω $a+M\in R/M$ και $a+M\neq M$ (δηλ. $a+M\neq 0_{R/M}$)

Τότε: $a\notin M$. Απ' το ② $\Rightarrow (a)+M=R\Rightarrow$

$\Rightarrow 1_R = r\cdot a + x$. Τότε: $1_R+M = r\cdot a + x + M$ $\underline{\underline{x\in M}}$

$= r\cdot a + M = (r+M)(a+M) = (a+M)(r+M) \Rightarrow$

$\Rightarrow a+M$: αντιστρέψιμο

Οπότε: R/M σώμα

NO:
Date:

③ ⇒ ① Έστω ότι R/M: σώμα

Τότε $R/M = \{0_{R/M}\}$ κι άρα $R \neq M$

Έστω I ένα ιδεώδες του R έτσι ώστε

$M \subseteq I \subseteq R$. Τότε I/M: ιδεώδες του R/M

Επειδή το R/M: σώμα έπεται ότι: i) $I/M = \{0_{R/M}\}$

ή ii) $I/M = R/M$

$\Leftrightarrow$ i) $I = M$ ii) $M = R$

Άρα: M μέγιστο

<u>Παράδειγμα:</u> ① Τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ είναι $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Επειδή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow n$: πρώτος, έπεται ότι

τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ είναι: $p\mathbb{Z}$, <u>p: πρώτος</u>

(!) <u>Σχόλιο:</u> Αν ο R είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τότε $\{0\}$: μέγιστο $\Leftrightarrow$ <u>R: σώμα</u>

② $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\}$

NO:
Date:

Θεωρούμε την απεικόνιση $f: R \to \mathbb{R}$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = c$. Τότε ο f: επιμορφισμός δακτυλίων και $Ker(f) = I$.

Απ' το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων $\Longrightarrow$

$R/I \cong \mathbb{R}$: σώμα $\Longrightarrow$ I: μέγιστο

Θεώρημα: Έστω K: σώμα κι έστω $P(t) \in K[t]$, ένα πολυώνυμο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

① Το $P(t)$ είναι ανάγωγο.

② $K[t]/(P(t))$: σώμα, δηλαδή το $P(t)$: μέγιστο ιδεώδες

③ $K[t]/(P(t))$: ακέραια περιοχή

Απόδειξη: ① $\Rightarrow$ ②. Έστω ότι το $P(t)$: ανάγωγο και θέτουμε $I = (P(t))$

Έστω $Q(t) + I \in K[t]/I$ ένα μη-μηδενικό στοιχείο

Τότε: $Q(t) + I \neq I \Rightarrow Q(t) \notin I = (P(t))$.

Ισοδύναμα: $P(t) \nmid Q(t)$, επειδή το $P(t)$: ανάγωγο $\Rightarrow$

$Q(t) \nmid P(t) \Rightarrow \text{ΜΚΔ}(P(t), Q(t)) = 1$

$\Rightarrow \exists\, A(t), B(t) \in K[t]: P(t)\cdot A(t) + Q(t)\cdot B(t) = 1$

NO:

Date:

Τότε στον $K[t]/I$: $\underbrace{P(t)\cdot A(t)}_{\in (P(t))=I} + Q(t)\cdot B(t) + I = 1 + I$

$\Rightarrow (Q(t)+I)(B(t)+I) = 1+I = (B(t)+I)(Q(t)+I) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $Q(t)+I$: αντιστρέψιμο

② $\Rightarrow$ ③ Προκύπτει άμεσα, διότι γνωρίζουμε ότι κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή

③ $\Rightarrow$ ① Έστω ότι το $P(t)$: δεν είναι ανάγωγο κι επομένως, υπάρχουν πολυώνυμα $P_1(t), P_2(t)$

$\deg P_i(t) < \deg P(t)$, $i=1,2,\dots$

Τότε: $\underbrace{P(t)+I}_{=0_{K[t]/I}=I} = P_1(t)P_2(t)+I = (P_1(t)+I)(P_2(t)+I)$

Ο $K[t]/I$: ακέραια περιοχή $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_1(t)+I = I$ ή $P_2(t)+I = I$

$\Rightarrow P_1(t) \in I$ ή $P_2(t) \in I$

- $P_1(t)$: πολλ/σιο του $P(t)$ — Άτοπο

ή $P_2(t)$: -״-

Άρα $P(t)$: ανάγωγο

NO:
Date:

Παραδείγματα: ① $(t^2+1) \subseteq \mathbb{R}[t]$ και $\mathbb{R}[t]/(t^2+1) \cong \mathbb{C}$

Οπότε: (t^2+1): μέγιστο

→ Είναι το (t^2+1) μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}[t]$;

↳ Όχι, διότι το (t^2+1): δεν είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{C}$

• $(t^2-4) \underset{\text{ιδεώδες}}{\subseteq} \mathbb{R}[t]$ και $\mathbb{R}[t]/(t^2-4) \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: δεν είναι σώμα

Άρα (t^2-4) δεν είναι μέγιστο.

{#fun #Beligiannis #historic_info}

↳ ③ $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής}\}$, μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

Θεώρημα (Kolmogorov): Τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ είναι της μορφής:

$M_k = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(r)=0\} \ \forall \ r\in[0,1]$

□

Ορισμός: Ένα ιδεώδες P σ' ένα δακτύλιο R: μεταθετικό με μονάδα, καλείται πρώτο αν-ν:

$\forall x,y\in R: x\cdot y\in P \Rightarrow x\in P$ ή $y\in P$

NO:
Date:

Θεώρημα: ① Το μηδενικό ιδεώδες $\{0\}$ του δακτυλίου R (μεταθετικός με μονάδα) είναι πρώτο $\iff$

$\iff R$: ακέραια περιοχή

② Αν R: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τότε:

P: πρώτο ιδεώδες $\iff R/P$: ακέραια περιοχή

③ Κάθε μέγιστο ιδεώδες σ' ένα μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα είναι πρώτο αλλά το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Απόδειξη: ① Άμεσα προκύπτει απ' τον ορισμό

② Αν P: πρώτο ιδεώδες, έστω $x+P, y+P \in R/P$:

$(x+P)(y+P) = P \Rightarrow xy + P = P \Rightarrow xy \in P \xrightarrow{P:\text{ πρώτο}}$

$x \in P$ ή $y \in P \Rightarrow x+P = P$ ή $y+P = P$

$\Rightarrow R/P$: ακέραια περιοχή

Αντίστροφα, αν R/P: ακέραια περιοχή

Έστω $x \cdot y \in P$, τότε: $xy + P = P \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+P)(y+P) = P \xrightarrow[\text{περιοχή}]{R/P:\text{ ακέραια}} x+P = P$ ή $y+P = P \Rightarrow$

NO:
Date:

$x\in P$ ή $y\in P$. Άρα, P: πρώτο

③ Προκύπτει άμεσα απ' το ② κι επειδή κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή

Άσκηση: R: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και P: πρώτο ιδεώδες του R, έτσι ώστε $|R/P|<\infty$

Τότε το P είναι μέγιστο, διότι P: πρώτο $\Rightarrow R/P$: ακέραια περιοχή

Όμως $|R/P|<\infty \Rightarrow R/P$: σώμα $\Rightarrow$ P: μέγιστο

$\to \{0\}\subseteq \mathbb{Z}$ είναι πρώτο αλλά όχι μέγιστο διότι $\mathbb{Z}/\{0\}\cong \mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα!

$\rightsquigarrow$ Όμως, υπάρχουν R: μεταθετικοί με μονάδα στους οποίους κάθε πρώτο είναι και μέγιστο.

πχ: Κάθε πεπερασμένος μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα έχει αυτή την ιδιότητα

Πρόβλημα: Πότε κάθε μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο;

. $\mathbb{Z}$, $K[t]$ είναι δακτύλιοι οι οποίοι δίνουν θετική απάντηση στο πρόβλημα.

Γενικότερα, αν ο R: περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε:

P: πρώτο $\Rightarrow$ P: μέγιστο

NO:
Date:

• Έστω R: δακτύλιος με μονάδα

Τότε ο R: <u>δακτύλιος του Boole</u> $\iff x \in R: x^2 = x$

① Κάθε δακτύλιος του Boole είναι μεταθετικός

$\forall x, y \in R: (x+y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx = x + y \implies$

$\implies \cancel{x} + \cancel{y} + xy + yx = \cancel{x} + \cancel{y} \implies xy + yx = 0 \implies$

$\implies x \cdot y = -yx$ ①

Ιδιαίτερα, για $\underline{x=y} \overset{①}{\implies} x^2 = -x^2 \implies x = -x$ ②

Απ' τις ①, ②, προκύπτει: $xy = -yx = yx \implies$
$\implies R$: μεταθετικός

② Κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο σ' έναν δακτύλιο Boole

Αν P: πρώτο ιδεώδες του R (R: δακτύλιος του Boole)

τότε: R/P: ακέραια περιοχή

[R: δακτύλιος του Boole και ακέραια περιοχή

$\implies \forall x \in R: x^2 = x \implies x^2 - x = 0 \implies x(x-1) = 0 \implies$

$\implies \underline{x = 0 \text{ ή } x = 1}$

NO:
Date:

Άρα ο $R = \{0, 1\}$

$\forall\ x+P \in R/P : (x+P)^2 = x^2+P = x+P \Rightarrow R/P$: ακέραια περιοχή ⊕ Δακτύλιος Boole

Άρα $R/P = \{P, 1+P\}$, άρα R/P: σώμα $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ <u>P: μέγιστο</u>

Αν ο R: δακτύλιος Boole $\Rightarrow \forall x \in R : x = -x \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in R$: <u>$2x = 0$</u>

<u>Ορισμός</u>: Αν υπάρχει $n \in N : n \cdot x = 0$, $\forall\ x \in R$, όπου R: δακτύλιος με μονάδα, τότε ο αριθμός
$char(R) = \min\{m \in N \mid m \cdot x = 0\ \forall x \in R\}$ καλείται <u>χαρακτηριστική</u> του R.

Αν <u>δεν</u> υπάρχει τέτοιος αριθμός n, τότε θεωρούμε $char(R) = 0$

<u>πχ</u>: Αν R: δακτύλιος Boole, τότε $char(R) = 2$

Επίσης, <u>$char(Z_n) = n$</u>

NO:
Date:

<u>Πρόταση:</u> Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N} : n \cdot x = 0 \ \forall x \in R$, τότε:

$char(R) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1_R = 0\}$

<u>Πρόταση:</u> Αν R: ακέραια περιοχή, τότε $char(R) = 0$ είτε $char(R)$: πρώτος

<u>Απόδειξη:</u> Αν $char(R) \neq 0$ και $char(R) = n_1 \cdot n_2$, τότε

$char(R) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1_R = 0\} := n$

Άρα $n = n_1 \cdot n_2 \Rightarrow n \cdot 1_R = n_1 \cdot n_2 \cdot 1_R =$

$$= (n_1 \cdot 1_R)(n_2 \cdot 1_R) \xrightarrow[\text{περιοχή}]{R:\text{ ακέραια}} n_1 \cdot 1_R = 0 \ \text{ή} \ n_2 \cdot 1_R = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$n_1 = n \qquad n_2 = n$$

Άρα <u>n: πρώτος</u>

#fun_again #Algebra_info #Belipower

K: σώμα $\Rightarrow \begin{cases} char(K) = 0 & i) \\ char(K) = p \text{ πρώτος} & ii) \end{cases}$. Υπάρχει υποδακτύλιος R όπου i) $R \cong \mathbb{Q}$
ii) $R \cong \mathbb{Z}_p$

!: Με το Νέο Οδηγό Σπουδών, ο κ. Μπεληγιάννης έχασε 26 ώρες διδασκαλίας.
Δεν πτοήθηκε! Και τις βόλτες του έκανε, και "συμπληρωματικές" ώρες έβαλε, και την ύλη έβγαλε, είχε <u>πρόγραμμα!!!</u>

Be like Beligiannis  ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!